Exercices supplémentaires
L3 Probabilités

Luca Ganassali

Le nombre d'étoiles ($\star$, $\star\star$, $\star\star\star$) donne une idée sur la difficulté de l'exercice. Si le temps le permet, nous parlerons de certains de ces exercices en TD. J'invite plus généralement les étudiants intéressés à venir en discuter à la fin des TDs, ou à m'envoyer leurs idées/versions rédigées par mail.

1 Expérience aléatoire, variables aléatoires

Exercice 1 (***On se promène sur*** $\mathbb{Z}$**,** $\star\star$).
Bob se promène sur $\mathbb{Z}$ en partant de l'origine (point 0) au temps $t = 0$. A chaque pas de temps, il fait un saut à droite $(+1)$ avec probabilité $1/2$, ou un saut à gauche (-1) avec probabilité $1/2$. On note S_t la position de Bob au temps t $(t \in \mathbb{N})$.

1) Que vaut $\mathbb{P}(S_t = 0)$ pour tout t ?

2) En moyenne, combien de fois Bob repasse-t-il par l'origine ? *Indication : l'espérance est linéaire...*

Exercice 2 (***Indicatrice d'Euler,*** $\star$).
Soit $n \geq 1$. On tire X uniformément au hasard dans $\Omega = \{1, \ldots, n\}$. On note, pour tout entier m :

$$A_m := \{m \text{ divise } x\}$$

et

$$B := \{x \text{ est premier avec } n\}.$$

On note $p_1, \ldots, p_r$ les diviseurs premiers de n.

1) Pour m divisant n, que vaut $\mathbb{P}(A_m)$?

2) Montrer que les évènements $A_{p_1}, \ldots, A_{p_r}$ sont mutuellement indépendants. *C'est l'occasion de revoir la définition de l'indépendance mutuelle.*

3) En déduire $\mathbb{P}(B)$.

4) Application : soit $\phi(n)$ le nombre d'entiers inférieurs à n qui sont premiers avec n. Montrer que

$$\phi(n) = n \prod_{k=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_k}\right).$$

Exercice 3 (***Une permutation aléatoire,*** $\star\star$).
On tire σ uniformément au hasard dans l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, n\}$. On note $F(\sigma)$ son nombre de points fixes.

1) Quelle est l'espérance de $F(\sigma)$? *Indication : l'espérance est linéaire...*

2) En utilisant la formule du crible (ou formule de Poincaré) du TD 2, montrer que

$$\mathbb{P}(F(\sigma) = k) = \frac{1}{k!} \sum_{q=0}^{n-k} \frac{(-1)^q}{q!}.$$

(on pourra commencer par le cas $k = 0$).

3) Quelle semble être la loi asymptotique de $F(\sigma)$ quand $n \to \infty$? Justifier.

Exercice 4 (***Entraînement au dénombrement,*** $\star$).
Sur un échiquier de taille 5×5 on place uniformément au hasard 5 pions (une case ne peut contenir qu'un seul pion au plus). Quelle est la probabilité de chacun des événements suivants :

1) Il n'y a aucun pion sur les deux diagonales.

2) Une colonne au moins est vide.

3) Il y a exactement un pion par ligne et par colonne.

Exercice 5 (***Paradoxe des anniversaires,*** $\star\star$).
On modélise la date d'anniversaire d'une personne par une variable uniforme dans $\{1, 365\}$. Dans un groupe de n personnes, quelle est la probabilité pour que deux personnes au moins aient leur anniversaire le même jour ?

A partir de quelle valeur de n cette valeur est-elle supérieure à 0.5 ?

Exercice 6 (***Sa place dans l'avion,*** $\star\star\star$).
Un avion compte n places assises. Le premier passager à rentrer n'a plus aucune idée de sa place, et il en prend une uniformément au hasard. Ensuite, les autres passagers obéissent à la règle suivante. Chacun à leur tour ils vont à leur place : si celle-ci est libre, il la prennent ; sinon, ils en prennent une au hasard uniformément parmi les places libres.

Quelle est la probabilité pour que le dernier passager se retrouve assis à sa place ?

Exercice 7 (***Des tournois,*** $\star\star\star$).
Dans cet exercice, nous allons voir que les probabilités peuvent parfois venir en aide pour prouver des résultats déterministes (*i.e. sans aléa*).

Un *tournoi* à n joueurs est défini par un sous-ensemble de $\{1, \ldots, n\}^2$ tel que pour tous éléments distincts x et y de $\{1, \ldots, n\}$, on a $(x, y) \in T$ ou $(y, x) \in T$, mais pas les deux. (En fait, un tournoi représente à l'aide d'arêtes orientées (des flèches) les issues de tous les matchs dans un tournoi à n joueurs : $(x, y) \in T$ si et seulement si le joueur x a battu le joueur y pendant leur rencontre.)

1) Combien y a t il de tournois différents à n joueurs ?

2) Combien y a t il de tournois différents à n joueurs admettant un leader absolu (i.e. un joueur qui a battu tout le monde) ?

3) Pour tout $k \leq n$, on dit qu'un tournoi T à n joueurs est $k-$*séparé* si pour tout sous-ensemble $S \subset \{1, \ldots, n\}$ de k joueurs, un des joueurs de $\{1, \ldots, n\} \setminus S$ a battu tous les joueurs de S. Par exemple, le tournoi à 3 joueurs $T = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$ est $1-$séparé, mais pas $2-$séparé.

(a) Montrer que si T est $(k + 1)-$séparé alors T est $k-$séparé.

(b) Existe-t-il un tournoi à 4 joueurs qui soit $2-$séparé ?

(c) Soit k un entier. Montrer que si n est tel que $\binom{n}{k}(1 - 2^{-k})^{n-k} < 1$, alors il existe un tournoi à n joueurs qui soit $k-$séparé.

On considèrera un tournoi T à n joueurs, aléatoire uniforme. Pour chaque sous-ensemble S de k joueurs, on poura noter

$$A_S := \{\textit{aucun joueur de } \{1, \ldots, n\} \setminus S \textit{ n'a battu tous les joueurs de } S\}.$$

4) Un *chemin hamiltonien* d'un tournoi T est un sous-ensemble de T de la forme

$$\{(1, \sigma(1)), (\sigma(1), \sigma(2)), \ldots, (\sigma(n-1), 1)\},$$

avec σ une bijection de $\{2, \ldots, n\}$ dans $\{2, \ldots, n\}$. Par exemple, le tournoi

$$T = \{(1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 4), (4, 1), (4, 2)\}$$

admet un chemin hamiltonien.

Montrer qu'il existe un tournoi à n joueurs admettant au moins $\frac{(n-1)!}{2^n}$ chemins hamiltoniens.

Indication : si X est une v.a. à valeurs dans $X(\Omega)$ fini, et que $\mathbb{E}[X] \geq x$, alors il existe $\omega \in \Omega$ tel que $X(\omega) \geq x$.

2 Raisonnement ensembliste, tribus, mesure

Exercice 8 (***Lemme de Borel-Cantelli et loi du zéro-un de Borel,*** $\star\star$).
Dans cet exercice, nous allons retravailler avec l'évènement $\limsup A_n$ *dont la définition a été abordée dans le TD2.*

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On considère une suite d'évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathcal{F}$. On rappelle la définition de l'évènement $\limsup A_n \in \mathcal{F}$:

$$\limsup A_n := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k\geq n} A_k.$$

1) Comment réécrire "avec des mots" l'évènement $\limsup A_n$?

2) On suppose que $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$ converge. Montrer qu'alors

$$\mathbb{P}(\limsup A_n) = 0.$$

C'est le lemme de Borel-Cantelli.

3) On suppose que $\sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_n)$ diverge et que les évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont mutuellement indépendants. Montrer qu'alors

$$\mathbb{P}(\limsup A_n) = 1.$$

C'est la loi du zéro-un de Borel.

4) Dans la question précédente, montrer que l'hypothèse d'indépendance est cruciale.

5) Applications :

(a) On tire une infinité de fois un dé équilibré (les tirages sont indépendants). Montrer que presque sûrement on obtient une infinité de fois la séquence 123456.

(b) On reprend le contexte de l'exercice 1 : on part de 0 et à chaque étape on part à droite $(+1)$ avec probabilité $p \in (0,1)$ et à gauche (-1) avec probabilité $1-p$. Montrer que si $p \neq 1/2$, alors presque sûrement, on ne revient qu'un nombre fini de fois en 0.

(c) Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ un suite de variables indépendantes telles que pour tout $n \geq 1$, X_n suit une loi exponentielle de paramètre n. Montrer que presque sûrement

$$X_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Exercice 9 (***Ensemble triadique de Cantor,*** $\star\star$).
Dans cet exercice, nous allons voir un exemple de partie de $\mathbb{R}$ *mesurable, non dénombrable, mais de mesure de Lebesgue nulle.*

On définit une suite $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de parties de $\mathbb{R}$ de la façon suivante. On pose $C_0 = [0,1]$, puis on 'découpe C_0 en trois', $C_0 = [0, 1/3] \cup]1/3, 2/3[\cup [2/3, 1]$, et on enlève l'intervalle ouvert central pour obtenir

$$C_1 = [0, 1/3] \cup [2/3, 1].$$

On réitère le procédé sur chaque intervalle fermé disjoints de C_n pour obtenir C_{n+1}. Ainsi,

$$C_2 = [0, 1/9] \cup [2/9, 1/3] \cup [2/3, 7/9] \cup [8/9, 1].$$

L'ensemble triadique de Cantor est défini par

$$C := \bigcap_{n\geq 0} C_n.$$

On notera λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que C est compact et que $\lambda(C) = 0$.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour $(a_1, \ldots, a_n) \in \{0,1\}^n$, on note

$$I_{a_1,\ldots,a_n} := \left[\sum_{k=1}^{n} \frac{2a_k}{3^k}, \sum_{k=1}^{n} \frac{2a_k}{3^k} + \frac{1}{3^n}\right].$$

Montrer que

$$C_n = \bigcup_{(a_1,\ldots,a_n)\in\{0,1\}^n} I_{a_1,\ldots,a_n}.$$

3) Pour toute suite $a = (a_k)_{k\geq 1} \in \{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$, on pose

$$\psi(a) := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{2a_k}{3^k}.$$

Montrer que ψ est une injection de $\{0,1\}^{\mathbb{N}^*}$ dans C, puis en déduire que C n'est pas dénombrable.

Exercice 10 (***Une partie de $\mathbb{R}$ non Lebesgue-mesurable,*** $\star\star\star$).
Dans cet exercice, nous allons voir un exemple de partie de $\mathbb{R}$ non Lebesgue-mesurable.
On considère la relation d'équivalence $\sim$ suivante sur $]0,1[$:

$$\forall x, y \in]0,1[,\ x \sim y \iff x - y \in \mathbb{Q}.$$

Pour chaque classe d'équivalence, on fixe un représentant de la classe [1] et on note E l'ensemble de ces représentants : ainsi pour tout $x \in]0,1[$, il existe un unique $y \in E$ tel que $x \sim y$.
Pour $F \subset]0,1[$ et $t \in]0,1[$, on notera $F + t$ l'ensemble $\{f + t, f \in F\}$.

1) Montrer que pour q et r deux éléments distincts de $\mathbb{Q}$, on a $(E+q) \cap (E+r) = \varnothing$.

2) Montrer que

$$]0,1[\subset \bigcup_{q\in\mathbb{Q}\cap]-1,1[} (E+q) \subset]-1,2[.$$

3) En utilisant la question précédente, montrer par l'absurde que E n'est pas Lebesgue-mesurable.

3 Variables aléatoires

Exercice 11 (***Original,*** $\star\star$).
Je dispose de deux dés à six faces, et je voudrais faire en sorte que lors d'un lancer, la somme des deux résultats suivent une loi uniforme. Montrer que même en les pipant comme je veux, c'est impossible.

Exercice 12 (***Encore le promeneur,*** $\star\star$).
On reprend notre exemple du promeneur qui se balade sur l'axe $\mathbb{Z}$, initialement positionné en 0 : à chaque instant, il va à droite ou à gauche indépendamment du passé avec probabilité $1/2$. Notons $X_i \in \{-1,+1\}$ le déplacement à l'étape i, et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ la position du promeneur après l'étape n.

1) Pour tout $t > 0$, montrer que e^{tS_n} est intégrable (i.e. admet une espérance) et calculer $\mathbb{E}\left[e^{tS_n}\right]$.

2) Montrer que pour tout réel u, $\cosh u \leq \exp(u^2/2)$. *Indication : pensez aux séries entières.*

3) Montrer que pour tout $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}(|S_n| \geq \lambda) \leq 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2n}\right).$$

Indication : On utilisera l'inégalité de Markov, après être passé à l'exponentielle dans la probabilité. Ensuite, on optimise en t pour avoir la borne la plus petite possible : c'est la méthode dite de ***Chernoff-Cramer****.*

1. Question en plus : a-t-on vraiment le droit de faire ça ?

4) Soit $c > 2$. Déduire de la question précédente que presque sûrement, pour n assez grand,

$$|S_n| \leq \sqrt{cn \ln n}.$$

Indication : On utilisera le Lemme de ***Borel-Cantelli*** *en posant des évènements convenables.*

Exercice 13 (***Tout faire soi-même,*** $\star\star$).
Alice, Bob et Charlie sont au guichet de la poste. Alice et Bob sont reçus tout de suite et Charlie attend son tour. Les temps de traitement des demandes sont indépendants et modélisés par des lois exponentielles de paramètres $\lambda > 0$. Quelle est la probabilité que Charlie ne soit pas le dernier à sortir de la poste ?

4 Convergence d'une suite de variables aléatoires

Exercice 14 (***Maximum de variables uniformes,*** $\star$).
On considère n variables i.i.d. uniformes sur $[a, b]$. On note M_n leur maximum.

1) Quelle est la limite presque sûre de M_n ? *Indication : Commencer par la convergence en probabilité*

2) On cherche le "premier ordre" de cette convergence. Montrer la convergence en loi suivante :

$$n(b - M_n) \xrightarrow{(d)} \mathcal{E}\left(\frac{1}{b-a}\right),$$

où $\mathcal{E}(\mu)$ désigne une v.a. exponentielle de paramètre μ. Interpréter en terme de vitesse de convergence dans la question 1.

3) Sans faire aucun calcul, comment peut-on trouver un résultat similaire à la question 2. pour m_n, le minimum des n variables ? *Indication : C'est un argument qui exploite une égalité de loi.*

Exercice 15 (***Une fausse loi des grands nombres,*** $\star\star$).
Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. i.i.d. de Bernoulli de paramètre p. On pose pour tout $n \geq 1$, $Y_n = X_n X_{n+1}$ et $V_n = Y_1 + \ldots + Y_n$.

1) Montrer que V_n/n converge en probabilité vers une variable que l'on précisera. *Indication : on ne peut pas appliquer la loi des grands nombres (pourquoi ?), du coup il faut travailler à la main en regardant le moment d'ordre 2 de V_n.*

2) La variable V_n/n converge-t-elle presque sûrement ?

Exercice 16 (***Etude d'une convergence en loi,*** $\star$).
Considérons une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de v.a. telle que X_n suive une loi exponentielle de paramètre $\lambda_n > 0$. On suppose que $\lim_n \lambda_n = 0$. Soit $Z_n = X_n - [X_n]$, où $[x]$ désigne la partie entière du réel x. Montrer que Z_n converge en loi. Préciser sa limite. *Indication : Utiliser les fonctions de répartition.*

Exercice 17 (***Power laws,*** $\star$).
La *power law* de paramètre $\alpha > 1$, notée $\mathrm{Pow}(\alpha)$ dans la suite, est la loi de densité $f_\alpha := C_\alpha x^{-\alpha} \mathbf{1}_{x\geq 1}$, où C_α est une constante.

1) Calculer C_α pour tout $\alpha > 1$.

2) Pour $X \sim \mathrm{Pow}(\alpha)$, X admet-il une espérance ? une variance ? Si oui, les donner.

3) Soient $X \sim \mathrm{Pow}(\alpha)$ et $Y \sim \mathrm{Pow}(\beta)$ indépendantes. Quelle est la loi de $\min(X, Y)$?

4) Si $X \sim \mathrm{Pow}(\alpha)$, quelle est la loi de $\log X$?

5) Soit $(\alpha_n)_n$ une suite de réels strictement supérieurs à 3, tels que $\alpha_n \to +\infty$. On considère une suite de v.a. $(X_n)_n$ indépendantes telle que chaque X_n est de loi $\mathrm{Pow}(\alpha_n)$.

(a) Montrer que $(X_n)_n$ converge dans L^2 vers une variable à préciser.

(b) La suite $(X_n)_n$ converge-t-elle presque sûrement ? Discuter.