

# STATISTIQUE MATHÉMATIQUE – PARTIEL

M1 Mathématiques Fondamentales, Université Paris-Saclay  
2025-2026

Lundi 16 février 2026  
9h – 12h

*Une feuille A4 recto manuscrite est autorisée en tant que support. La calculatrice est autorisée.*

## ***Avant de commencer :***

- *Le sujet comporte une question de cours, un exercice et un problème. Il est demandé de les traiter dans l'ordre sur la copie.*
- *Des résultats pourront être admis d'une question à l'autre, à la condition de l'écrire clairement.*
- *Une attention particulière sera portée aux questions d'interprétation, à la rigueur et à la précision de la rédaction.*
- *Un barème indicatif est donné :*
  - Question de cours : 2 points,*
  - Exercice : 5 points,*
  - Problème : 13 points (et plus).*

*Bon courage et amusez-vous !*

---

## Une question de cours

On se place dans un modèle paramétrique où  $\Theta \subset \mathbb{R}^p$ . Soit  $T(X)$  un estimateur de  $\theta$  tel que  $\text{Var}_\theta(T(X))$  est finie pour tout  $\theta \in \Theta$ . Démontrer proprement la décomposition biais-variance du risque quadratique de  $T(X)$ . Il sera possible (mais non obligatoire) d'accompagner la démonstration d'un dessin.

## Exercice – Une Rao-Blackwellisation

On considère le modèle où  $X_1, \dots, X_n$  sont i.i.d. de loi<sup>1</sup>  $\text{Poi}(\lambda)$ , avec  $\lambda > 0$  inconnu. On souhaite estimer  $\varphi(\lambda) = e^{-\lambda}$ .

1. Montrer que  $T(X) = \mathbb{1}_{X_1=0}$  est un estimateur sans biais de  $\varphi(\lambda)$ . Calculer sa variance. Est-ce un bon estimateur ?
2. Prouver que  $S(X) = \sum_{i=1}^n X_i$  est une statistique complète et suffisante pour le modèle. *On pourra utiliser sans démonstration que si  $Y_1 \sim \text{Poi}(\lambda_1)$  et  $Y_2 \sim \text{Poi}(\lambda_2)$  sont indépendants, alors  $Y_1 + Y_2 \sim \text{Poi}(\lambda_1 + \lambda_2)$ .*
3. Calculer l'estimateur Rao-Blackwellisé  $T^*$  de  $T$  par  $S$ , et montrer que  $T^*$  est UVMB<sup>2</sup> pour l'estimation de  $\varphi(\lambda)$ .

## Problème – Estimation dans un modèle de translation

Dans tout le problème,  $\|\cdot\|$  désigne la norme euclidienne canonique sur  $\mathbb{R}^d$ , et  $\nabla$  désigne le gradient sur  $\mathbb{R}^d$ . On considère le modèle où  $X = (X_1, \dots, X_n)$  avec  $X_i$  vecteurs aléatoires i.i.d. à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ . Pour  $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^d$ , sous  $\mathbb{P}_\theta$ ,  $X_1$  possède une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}^d$  donnée par

$$x \mapsto f(x - \theta),$$

où  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  est une densité de probabilité, strictement positive, supposée connue. On parle alors de *modèle de translation*. On suppose que le modèle est régulier, et que

(H1)  $f$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^d$  et  $\nabla \log f$  vérifie  $\sup_{x \in \mathbb{R}^d} \|\nabla \log f(x)\| < +\infty$ .

(H2)  $\Theta$  est un compact de  $\mathbb{R}^d$ .

### Partie I – Propriétés générales du modèle.

1. Montrer que le modèle est identifiable.
2. Montrer que l'information de Fisher s'écrit

$$\forall \theta \in \Theta, I(\theta) = n \int_{\mathbb{R}^d} \frac{(\nabla f(x))(\nabla f(x))^\top}{f(x)} dx.$$

3. Comment interprétez-vous le fait que  $I(\theta)$  ne dépende pas de  $\theta$  ?
4. Montrer qu'il existe un estimateur du maximum de vraisemblance (EMV, pas forcément unique), et que tout EMV  $\hat{\theta}_n(X)$  vérifie

$$\hat{\theta}_n(X) \in \arg \max_{t \in \Theta} M_n(X, t),$$

---

<sup>1</sup>rappel : c'est la loi telle que pour tout  $k \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ .

<sup>2</sup>UVMB : sans biais et uniformément de variance minimale.

avec

$$M_n(X, t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log f(X_i - t).$$

Pour  $t \in \Theta$ , on note  $M(t) = \mathbb{E}_\theta[\log f(X_1 - t)]$ .

5. Montrer que pour tout  $t \in \Theta$ ,  $M_n(X, t) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} M(t)$ .

6. Montrer que  $M$  admet un maximum global atteint uniquement en  $t = \theta$ . On pourra montrer que pour tout  $t \in \Theta$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^d} f(x - \theta) \log \left( \frac{f(x - \theta)}{f(x - t)} \right) dx \geq 0,$$

et étudier le cas d'égalité.

7. D'après ce qui précède, pourquoi, intuitivement,  $\hat{\theta}_n$  a-t-il une chance d'être proche de  $\theta$  lorsque  $n$  est grand ? On attend un argument heuristique (non rigoureux).

## Partie II – Un résultat d'analyse

Pour rendre rigoureuse l'intuition de la question 7, il nous faut un résultat d'analyse dont cette partie fait l'objet.

Soit  $\Gamma$  un compact de  $\mathbb{R}^d$ . Soit  $(g_n)_{n \geq 0}$  une suite de fonctions continues de  $\Gamma$  dans  $\mathbb{R}$ , et  $g : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ . On suppose que  $g_n$  converge uniformément vers  $g$ , que  $g$  a un maximum global atteint en un unique  $x^* \in \Gamma$ , et que pour tout  $n$ , il existe  $x_n \in \Gamma$  tel que  $g_n(x_n) = \sup_{x \in \Gamma} g_n(x)$ . L'objectif est de démontrer que la suite  $(x_n)_{n \geq 0}$  converge vers  $x^*$ .

Fixons  $\varepsilon > 0$ . On considère  $\Gamma_\varepsilon := \{x \in \Gamma, \|x - x^*\| \geq \varepsilon\}$ , et

$$\delta := g(x^*) - \sup_{x \in \Gamma_\varepsilon} g(x).$$

8. Justifier que  $\delta > 0$ .

9. Montrer qu'il existe  $N \geq 0$  tel que pour tout  $n \geq N$ , pour tout  $x \in \Gamma_\varepsilon$ ,

$$g(x^*) - \frac{1}{3}\delta \leq g_n(x^*) \quad \text{et} \quad g_n(x) \leq g(x^*) - \frac{2}{3}\delta,$$

puis que  $g_n(x) < g_n(x^*)$ .

10. En déduire que pour  $n \geq N$ ,  $x_n \notin \Gamma_\varepsilon$ . Conclure.

## Partie III – Une loi des grands nombres uniforme

Le but de cette partie est de montrer qu'on a la convergence uniforme presque sûre :

$$\sup_{t \in \Theta} |M_n(X, t) - M(t)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0.$$

Notons que ce résultat est plus fort que celui établi en question 5.

Fixons  $\varepsilon > 0$ .

11. En utilisant (H1), montrer qu'il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $\theta, \theta' \in \Theta$ ,

$$\|\theta - \theta'\| \leq \eta \implies \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\log f(x - \theta) - \log f(x - \theta')| \leq \varepsilon.$$

---

12. Montrer qu'il existe  $m \geq 1$ ,  $t_1, \dots, t_m \in \Theta$  tels que pour tout  $t \in \Theta$ , il existe  $1 \leq j \leq m$  tel que  $\|t - t_j\| \leq \eta$ .

13. Soit  $t \in \Theta$ . Montrer qu'il existe un entier  $1 \leq j \leq m$  tel que :

$$|M_n(X, t) - M(t)| \leq |M_n(X, t_j) - M(t_j)| + 2\varepsilon.$$

14. Conclure.

**Partie IV – Conclusion : consistance de tout estimateur du maximum de vraisemblance**

15. En utilisant les résultats des parties II et III, montrer que tout EMV  $\hat{\theta}_n$  est fortement consistant.

*Fin du sujet.*