

MAP361T : Exercices de révision - 2

Luca Ganassali

Mots clés : convergence de variables aléatoires.

Exercice 1 (Maximum de variables uniformes).

On considère n variables i.i.d. uniformes sur $[a, b]$. On note M_n leur maximum.

- 1) Quelle est la limite presque sûre de M_n ? *Aide : Commencer par la convergence en proba, puis cf. notes de la dernière fois...*
- 2) On cherche le "premier ordre" de cette convergence. Montrer la convergence en loi suivante :

$$n(b - M_n) \xrightarrow{(d)} \mathcal{E}\left(\frac{1}{b - a}\right),$$

où $\mathcal{E}(\mu)$ désigne une v.a. exponentielle de paramètre μ . Interpréter en terme de vitesse de convergence dans la question 1. *Aide : On sait faire deux choses, fonction de répartition et fonction caractéristique... Laquelle vous semble la plus facile d'accès ?*

- 3) Sans faire aucun calcul, comment peut-on trouver un résultat similaire à la question 2. pour m_n , le minimum des n variables? *Aide : C'est un argument qui exploite une égalité de loi.*

Exercice 2 (Une fausse loi des grands nombres).

Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. i.i.d. de Bernoulli de paramètre p . On pose pour tout $n \geq 1$, $Y_n = X_n X_{n+1}$ et $V_n = Y_1 + \dots + Y_n$.

- 1) Montrer que V_n/n converge en probabilité vers une variable que l'on précisera. *Aide : on ne peut pas appliquer la loi des grands nombres (pourquoi ?), du coup il faut travailler à la main en regardant le moment d'ordre 2 de V_n .*
- 2) La variable V_n/n converge-t-elle presque sûrement? *Aide : on utilisera, là encore, Borel-Cantelli.*

Exercice 3 (Etude d'une convergence en loi).

Considérons une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de v.a. telle que X_n suive une loi exponentielle de paramètre $\lambda_n > 0$. On suppose que $\lim_n \lambda_n = 0$. Soit $Z_n = X_n - [X_n]$, où $[x]$ désigne la partie entière du réel x . Montrer que Z_n converge en loi. Préciser sa limite. *Aide : Utiliser les fonctions de répartition.*