MAP361T : Exercices de révision - 1

Luca Ganassali

Mots clés : Borel-Cantelli, concentration, bases du raisonnement probabiliste.

Exercice 1 (***Encore le promeneur***).
On reprend notre exemple du promeneur qui se balade sur l'axe $\mathbb{Z}$, initialement positionné en 0. Cette fois-ci, à chaque instant, il va à droite ou à gauche indépendamment du passé avec probabilité 1/2. Notons $X_i \in \{-1, +1\}$ le déplacement à l'étape i, et $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ la position du promeneur après l'étape n.

1) Pour tout $t > 0$, montrer que e^{tS_n} est intégrable et calculer $\mathbb{E}\left[e^{tS_n}\right]$.

2) Montrer que pour tout réel u, $\cosh u \leq \exp(u^2/2)$. *Aide : pensez aux séries entières.*

3) Montrer que pour tout $\lambda > 0$,

$$\mathbb{P}\left(|S_n| \geq \lambda\right) \leq 2\exp\left(-\frac{\lambda^2}{2n}\right).$$

Aide : On utilisera une inégalité de type Markov, après être passé à l'exponentielle dans la probabilité. Ensuite, on optimise en t pour avoir la borne la plus petit possible : c'est la méthode dite de ***Chernoff-Cramer****.*

4) Soit $c > 2$. Déduire de la question précédente que presque sûrement, pour n assez grand,

$$|S_n| \leq \sqrt{cn \ln n}.$$

Aide : On utilisera ***Borel-Cantelli*** *en posant des évènements convenables.*

Exercice 2 (***L'astuce du premier pas***).
On considère un jeu où chaque partie est indépendante, et a une proba de victoire égale à p. On se demande quel est le nombre de parties nécéssaires X pour arriver à gagner deux fois de suite.

1) Montrer que si $p \in]0, 1]$, $X < \infty$ p.s.
Aide : là encore, ça sent ***Borel-Cantelli****. Mais notez que le résultat demandé est moins fort que les vraies conclusions de B-C.*

2) Donner la loi de X. On pourra noter $p_n = \mathbb{P}(X = n)$.
Aide : Alors là, on sent qu'on ne peut pas calculer directement p_n. Il faut trouver une relation de récurrence. En proba les relations de récurrence de ce type sont (quasi-) toujours le résultat de la ***formule des probas totales****. Reste à savoir sur quoi partitionner. Puisque X dépend de la partie précédente, on va disjoncter selon le résultat de la première partie (ou les deux premières). Cela doit mener à $p_{n+2} = (1-p)p_{n+1} + p(1-p)p_n$. Cette astuce classique peut être appelée* ***disjonction selon le(s) premier(s) pas****.*

Exercice 3 (***Tout faire soi-même***).
Alice, Bob et Charlie sont au guichet de la poste. Alice et Bob sont reçus tout de suite et Charlie attend son tour. Les temps de traitement des demandes sont indépendants et modélisés par des lois exponentielles de paramètres $\lambda > 0$. Quelle est la probabilité que Charlie ne soit pas le dernier à sortir de la poste ?