

THÉORIE DE LA MESURE ET PROBABILITÉS

DEVOIR MAISON

L3 Magistère de Mathématiques, Université Paris-Saclay
2025-2026

*Ce devoir maison est facultatif. Vous êtes libres de le rendre seul·e ou en petit groupe, traité partiellement ou totalement. Dans tous les cas, il est à rendre pour le **mardi 21 avril 2026, 23h59**. Amusez-vous bien !*

Norme d'opérateur d'une matrice aléatoire

Dans ce problème, on cherche à contrôler la norme d'opérateur d'une matrice aléatoire $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ centrée, dont les coefficients sont indépendants et "pas trop méchants". On donne dans la Partie I une définition mathématique de ce qu'on entend par "pas trop méchant". Dans la Partie II, on discrétise la sphère unité de \mathbb{R}^n de façon à pouvoir contrôler avec forte probabilité la norme d'opérateur de E . Pour celles et ceux qui ont encore de l'appétit, on applique ensuite ces résultats en Partie III à la reconstruction d'une matrice de faible rang.

Partie I. Variables sous-gaussiennes.

Pour $\alpha > 0$, on dit qu'une variable aléatoire réelle X est α -sous-gaussienne si :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{E}[\exp(tX)] \leq \exp(\alpha^2 t^2 / 2).$$

En étudiant $t \mapsto \mathbb{E}[\exp(tX)]$ au voisinage de 0, on peut établir qu'une variable aléatoire α -sous-gaussienne est toujours centrée et vérifie $\mathbb{E}[X^2] \leq \alpha^2$. Cela n'est pas directement utile pour le problème, mais méritait d'être mentionné.

1. Pour $\alpha > 0$ fixé, donner un exemple d'une variable aléatoire α -sous-gaussienne et non constante p.s.
2. Montrer que si X_1, \dots, X_n sont indépendantes et toutes α -sous-gaussiennes, et μ_1, \dots, μ_n sont des réels vérifiant $\sum_{i=1}^n \mu_i^2 = 1$, alors $\sum_{i=1}^n \mu_i X_i$ est encore α -sous-gaussienne.
3. Soit X une variable aléatoire α -sous-gaussienne et $\lambda > 0$. Montrer que, pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}(X \geq \lambda) \leq \exp\left(\frac{\alpha^2 t^2}{2} - t\lambda\right)$$

et en déduire que

$$\mathbb{P}(|X| \geq \lambda) \leq 2 \exp\left(-\frac{\lambda^2}{2\alpha^2}\right).$$

4. Soit X une variable aléatoire α -sous-gaussienne et $\beta > 0$. Montrer à l'aide de la question précédente que pour tout entier $k \geq 1$,

$$\mathbb{P}\left(\exp\left(\frac{\beta^2 X^2}{2}\right) \geq k\right) \leq 2k^{-\eta},$$

où l'on a posé $\eta = \frac{1}{\alpha^2\beta^2}$.

5. Si X est une variable aléatoire à valeurs dans \mathbb{R}_+ , montrer que

$$\mathbb{E}[X] \leq 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \mathbb{P}(X \geq k).$$

On pourra réutiliser des résultats vus en TDs.

6. Dédurre de ce qui précède que si X est une variable aléatoire α -sous-gaussienne, on a l'inégalité d'Orlicz :

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{X^2}{4\alpha^2} \right) \right] \leq 5.$$

On pourra utiliser sans justification que $\zeta(2) \leq 2$.

Partie II. Recouvrement de la sphère et application aux matrices aléatoires.

Dans cette partie, on note $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n, \|x\| = 1\}$, où $\|\cdot\|$ désigne la norme euclidienne standard. Pour $a \in \mathbb{R}^n$ et $r > 0$, on note $B(a, r)$ désigne la boule fermée de \mathbb{R}^n centrée en a et de rayon r . On fixe $\varepsilon > 0$.

7. Soit Γ une partie de \mathbb{S}^{n-1} telle que pour tout a, a' distincts dans Γ , $\|a - a'\| > \varepsilon$. Montrer que Γ est fini et que

$$|\Gamma| \leq \left(1 + \frac{2}{\varepsilon}\right)^n.$$

On pourra remarquer que les boules $B(a, \varepsilon/2)$ pour $a \in \Gamma$ sont deux à deux disjointes et incluses dans une boule commune à déterminer.

8. Montrer qu'en prenant Γ de cardinal maximal dans la fonction précédente, on a

$$\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \bigcup_{a \in \Gamma} B(a, \varepsilon).$$

En déduire qu'il existe Γ_n partie de \mathbb{S}^{n-1} de cardinal majoré par 5^n qui vérifie

$$\mathbb{S}^{n-1} \subseteq \bigcup_{a \in \Gamma_n} B(a, 1/2).$$

9. Montrer que pour toute matrice $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

$$\|A\|_{op} \leq 2 \sup_{x \in \Gamma_n} \|Ax\|.$$

Remarque : l'introduction de l'ensemble Γ_n permet de discrétiser la sphère unité, qui est un ensemble infini, en un ensemble fini bien contrôlé. Cette technique, appelée argument de ε -net, est très classique en probabilités en grande dimension. Elle permet de remplacer un supremum sur un ensemble continu par un maximum sur un ensemble fini, rendant ainsi possible l'utilisation d'arguments de type borne de l'union, facilitant ainsi les estimations probabilistes.

On considère $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ une matrice aléatoire dont toutes les entrées sont indépendantes et α -sous-gaussiennes.

10. Soit $x \in \mathbb{S}^{n-1}$. Montrer que les composantes du vecteur Ex sont des variables aléatoires indépendantes et α -sous-gaussiennes. En déduire que

$$\mathbb{E} \left[\exp \left(\frac{\|Ex\|^2}{4\alpha^2} \right) \right] \leq 5^n$$

puis que pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}(\|Ex\| \geq 2t\alpha\sqrt{n}) \leq \left(5e^{-t^2}\right)^n$$

11. Montrer enfin que pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}(\|E\|_{op} \geq 4t\alpha\sqrt{n}) \leq \left(25e^{-t^2}\right)^n$$

Partie III. Application : débruiter une matrice de faible rang.

On considère une matrice déterministe $Y^* \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de rang $r \leq n$. On observe $Y = Y^* + E$, où $E \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est une matrice aléatoire dont toutes les entrées sont indépendantes et α -sous-gaussiennes.

On cherche à répondre à la question suivante : en observant Y , peut-on retrouver la matrice initiale Y^* ? L'idée intuitive est de projeter notre Y sur l'espace des matrices de rang r pour la norme d'opérateur. Considérons \hat{Y} solution du problème d'optimisation :

$$\min_{\substack{Z \in \mathbb{R}^{n \times n} \\ \text{rang}(Z) \leq r}} \|Y - Z\|_{op}. \quad (1)$$

12. Montrer que

$$\|\hat{Y} - Y^*\|_{op} \leq 2\|Y - Y^*\|_{op},$$

puis qu'avec probabilité au moins $1 - e^{-n}$,

$$\|\hat{Y} - Y^*\|_{op} \leq 17\alpha\sqrt{n}.$$

13. Montrer que si $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ est de rang r , $\|A\|_F^2 \leq r\|A\|_{op}^2$, où $\|A\|_F^2 := \sum_{1 \leq i, j \leq n} A_{i, j}^2$ est la norme de Frobenius. On passera par la décomposition de A en valeurs singulières.

14. En déduire qu'il existe une constante $C > 0$ universelle telle qu'avec probabilité au moins $1 - e^{-n}$,

$$\frac{1}{n^2} \|\hat{Y} - Y^*\|_F^2 \leq C \frac{\alpha^2 r}{n}.$$

Interpréter ce résultat au regard de la question posée initialement.

Fin du sujet.